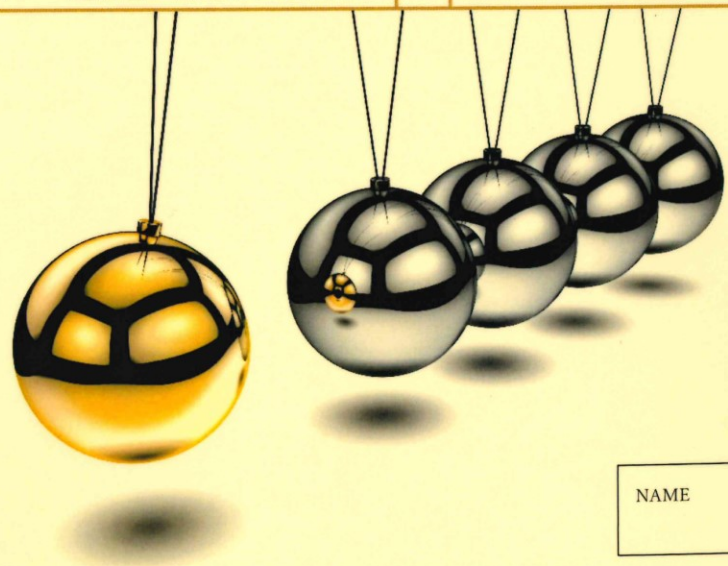
創伸塾
Creativity and growth power

難関大学物理対策 SERIES 力学編

# 難関物理の極

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 東京大学　(運動量保存則) | 16 | 大阪大学　(万有引力，円運動) |
| 2 | 重要問題　(運動量保存則) | 17 | 東京工業大学　(万有引力，円運動) |
| 3 | 大阪大学　(運動量と力積) | 18 | 東京大学　(万有引力，円運動) |
| 4 | 重要問題　(運動量保存則) | 19 | 北海道大学　(単振動，運動量保存) |
| 5 | 東京大学　(運動量と力積) | 20 | 東京大学　(単振動) |
| 6 | 東京大学　(運動量保存則) | 21 | 阪大実戦　(単振動，慣性力) |
| 7 | 東京大学　(運動量保存則) | 22 | 神戸大学　(単振動，慣性力) |
| 8 | 東京工業大学　(運動量，慣性力) | 23 | 東京大学　(単振動，万有引力) |
| 9 | 京都大学　(運動量保存則) | 24 | 京都大学　(単振動，運動量) |
| 10 | 大阪大学　(運動量保存則) | 25 | 東京大学　(単振動) |
| 11 | 大阪大学　(円運動) | 26 | 早稲田大学　(単振動) |
| 12 | 東京大学　(円運動) | 27 | 東京大学　(単振動) |
| 13 | 京都大学　(円運動) | 28 | 東京大学　(単振動) |
| 14 | 東京大学　(円運動) | 29 | 東京大学　(単振動) |
| 15 | 京都大学　(運動量，円運動，慣性力) | 30 | 東京大学　(単振動) |



NAME

## $\boxed{5}$ 東京大学 (運動量保存則と力積) 解答・解説 P,71

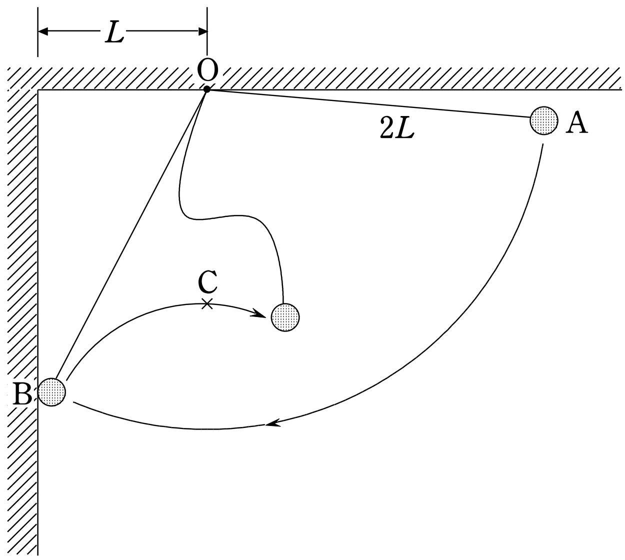
図のように，鉛直方向に立っている滑らかな壁から距離$L$の支点Oに，長さ$2L$の糸を結びつけ，その先に質量$m$の小球をつけておく。糸の質量や小球の大きさは無視でき，空気抵抗や支点での摩擦はないもとする。重力加速度の大きさを $g$ として以下の設問に答えよ。

Ⅰ この小球を，糸をピンと張った状態で水平に近い角度でA点から静かにはなすと，糸がまっすぐに伸びた状態で運動し，小球は壁のB点に速さ $v$ で衝突した。壁ではね返った小球は，糸がたるんだ状態で放物運動し，もっとも高く上がった地点Cは，支点Oの真下の方向にあった。ただし，壁との衝突は完全弾性衝突とは限らない。

(1) 衝突直後における小球の速度の鉛直方向成分の大きさはどれだけか。
(2) もっとも高く上がった地点Cと衝突点Bとの高低差はどれだけか。
(3) 衝突直後から再び糸がピンと張る状態になる瞬間までの時間を答えよ。
(4) 衝突直後における小球の速度の水平方向成分の大きさを$g$，$L$，$v$ を用いて表せ。
(5) はじめに小球をはなした位置Aと衝突点Bとの高低差は$h$であった。壁のはねかえり係数(反発係数)を，$L$および$h$を用いて表せ。

Ⅱ 前問の糸を，質量の無視できる長さ$2L$の変形しない棒に取りかえて，B点からの高低差が$d$ の地点から小球を静かにはなすと，小球はB点で壁に衝突した。

(1) 衝突を完全弾性衝突であるとして，衝突の瞬間に小球が受けた力積の大きさを求めよ。
(2) 前問の力積のうち，壁から受けた分の大きさはどれだけか。



## $\boxed{6}$ 京都大学 (運動量保存則) 解答・解説 P,72

次の文章を読んで，$\boxed{\phantom{xx}}$に適した式を，それぞれ記せ。

(1) 図1に示すように，質量$M$の小球Aが，質量を無視できる長さ $l$ の伸びない糸でつり下げられており，糸の他端にとりつけられた質量$m$の小物体Bは，水平な直線レールに沿ってなめらかに移動できるようになっている。重力加速度を $g$ とし，空気抵抗は無視できる。

はじめに，図1の静止状態において，小球Aの$\alpha$倍の質量$\alpha M$をもつ小球Cが，水平右向きに速さ$w_0$で小球Aに正面衝突し，両球は互いに水平方向にはねかえされた。小球A，Cの衝突後の運動は，レールを含む鉛直平面内に限られるものとする。衝突直後，小物体Bはレールに沿ってすべりはじめたが，その初速度は0であった。小球Aと小球Cの衝突のはねかえり係数(反発係数)が $e$ であるとき，衝突直後の小球Aの速さは $\boxed{(イ)}$ であり，小球Cについては，もし不等式 $\boxed{(ロ)}$ が成り立てば右向きに運動し，その速さは $\boxed{(ハ)}$ である。また，この衝突によって失われた全力学的エネルギーは $\boxed{(ニ)}$ である。

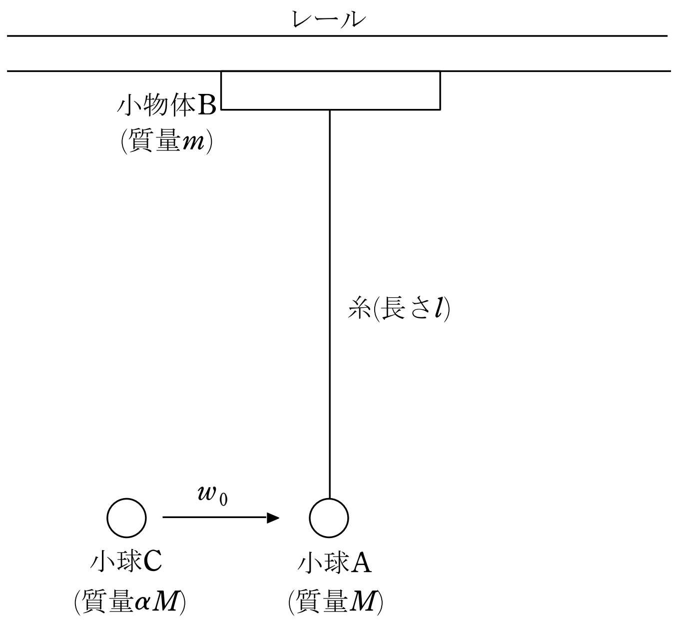



図1

(2)　(1)における衝突によって，小球Aが得た水平右向きの初速度の大きさを$u_0$と記し，以下では，衝突後の運動に関係する諸量を$u_0$を用いて表すことにする。衝突の後，小物体Bはレールに沿って移動しつつ，糸は鉛直状態を中心にして左右に振れた。ただし，振れの最大の角度は90度より小さかった。ある瞬間に，小球Aの速度の水平方向(右向きが正)が$u$であり，小物体Bのそれが$v$であった。$u$と$v$とのあいだには等式 (ホ) が成り立たなければならない。一方，同じ瞬間に，小物体Bからの距離$x$だけ離れた糸上の点がもつ速度の水平成分は，糸が直線状であることに注意すれば，$u$，$v$，$l$，$x$を用いて (ヘ) のように表される。これら2つの関係から，$x=$ (ト) の点の速度は常に一定の水平成分 (チ) をもつことがわかる。

(3)　糸が図2に示されるように右に振れきった瞬間，小球Aは水平方向にのみ速さ (リ) をもち，最低点から (ヌ) だけ高い位置にある。その後はじめて糸が鉛直になった瞬間における小球Aの運動は，もし不等式 (ル) が成り立てば右向きであり，その速さは (ヲ) である。また，同じ瞬間における小物体Bの速さは (ワ) である。

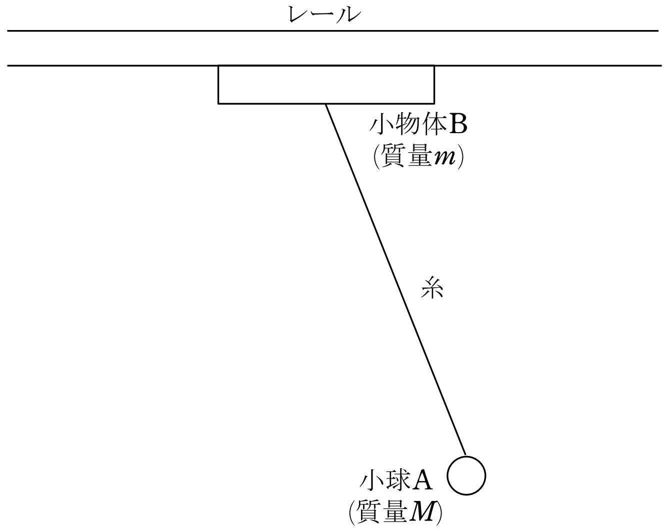



図2

## $\boxed{7}$　東京大学　(運動量保存則)　　　　解答・解説 P,75

滑らかで水平な床の上を自由に動く質量$M$の台に，堅くて質量の無視できる針金を図1に示すように固定した。針金は直線の傾斜部分AB，水平部分CD，およびそれらを滑らかにつなぐBCからなる。BCの長さは，ABやCDに比べて無視できるほど短いものとし，水平部分CDから測ったA点の高さを$h$，CDの長さを $l$ とする。針金に質量$m$の穴のあいた小球を通してA点で静かに放したら，小球はABを滑り落ちたあと，B，Cを経て台に衝突してはねかえった。小球と針金の間に摩擦はないもとし，小球と台との間のはねかえり係数(反発係数)を $e$ とする。重力加速度の大きさを $g$ とする。水平右向きに $x$ 軸，鉛直上向きに $y$ 軸をとる。以下の設問に答えよ。

Ⅰ　小球が最初にC点に達した瞬間の，小球の速度$u_1$と台の速度$V_1$を符号を含めて求めよ。また，小球がC点からD点に達するのに要する時間$t_1$を求めよ。

Ⅱ　小球が台に衝突後C点に戻るまでの時間$t_2$は$t_1$の何倍か。

Ⅲ　小球がC点に戻ったときの台の位置は，小球が最初にC点に達したときの台の位置からどれくらいずれているか。

Ⅳ　小球がA点から落下を始めてD点に達するまでの間の，台の速度と時間の関係を調べてみよう。

(1)　小球が最初にB点を通過するときの台の速度$V$を，B点での小球の $y$ 方向の速度$u_y$を含む式で表せ。B点とC点の落差は無視してよい。

(2)　小球がA点からD点に達するまでの，台の速度と時間の関係をグラフで示せ。その際，小球が最初にABを滑り落ちるのに要した時間を$t_0$としてグラフ上に記入せよ。

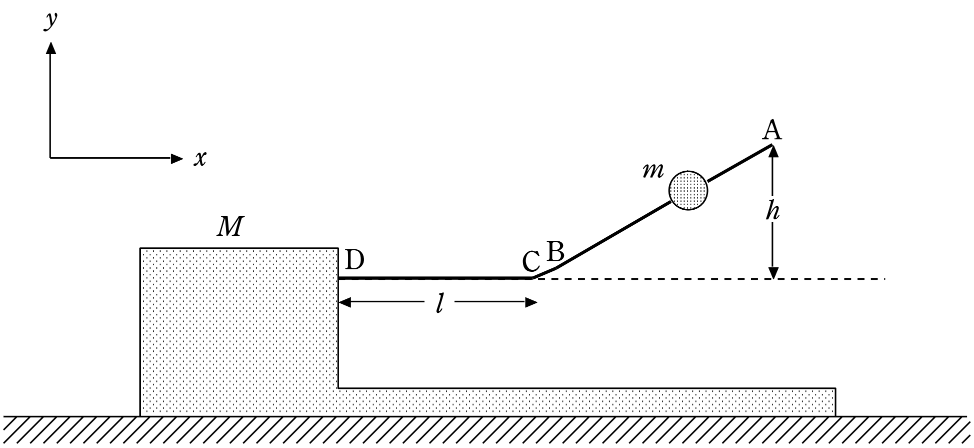
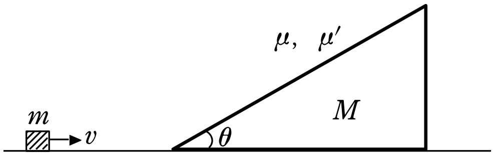



図1

**8 東京工業大学　(運動量保存則，慣性力)**　　　　**解答・解説 P,77**

図のように，摩擦の無視できる十分に広い水平な床の上に，大きさの無視できる質量$m$の小物体と，床との傾斜角が$\theta$の斜面をもつ質量$M$の三角台が置かれている。三角台の斜面はあらく，小物体と斜面の間の静止摩擦係数を$\mu$，動摩擦係数を$\mu'$ ($\mu'<\mu$) とする。いま，両物体を床に対して静止させたあと，斜面に向けて正面から小物体に速さ $v$ を与えた。重力加速度の大きさを $g$ とする。




Ⅰ　両物体は接触し，その後，小物体は斜面に沿って上向きにすべり，三角台は一定の加速度で床の上をなめらかにすべり始めた。ただし，小物体は斜面が床と接する境界をなめらかに通過するものとする。

問1　小物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを$N$とする。床に対する三角台の加速度の大きさを$N$，$M$，$\mu'$，$\theta$ を用いて表せ。

問2　三角台とともに運動する観測者からは，小物体に加わる力の斜面に垂直な方向の成分はつり合っているように見える。このことを用いて$N$を求めよ。

Ⅱ　その後，小物体は床からの高さが$h$ の位置まですべると斜面に対して静止し，そのまま両物体は一体となって床の上をすべった。

問3　このようになるための条件を$\theta$と$\mu$を用いて表せ。

問4　一体となって運動している両物体の速さ$V$ を求めよ。$h$は用いないで表せ。

問5　小物体が斜面に対して静止するまでに摩擦により失われた力学的エネルギーを$h$，$N$，$\theta$，$\mu'$ を用いて表せ。

問6　高さ$h$ を求めよ。ただし，$N$，$V$を用いてもよい。

　次の文章を読んで，$\boxed{\phantom{aa}}$ に適した式または値を，問1では，指定にしたがって解答を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{\phantom{aa}}}$ は，すでに $\boxed{\phantom{aa}}$ で与えられたものと同じものを表す。

　図1に示すように，傾斜角$\theta$の斜面とそれになだらかに続く水平面をもつ質量$M$の台Qが，水平な床の上におかれている。台Qと床との間には摩擦はない。台Qの水平面の右端には，ばね定数$k$のばねが水平に取り付けられている。ばねの質量は十分小さく無視できるものとする。このとき，以下の(1)～(4)の状態を考える。

　運動はすべて同一鉛直面内(すなわち，図1の紙面内)で起こるものとする。速度および加速度は床に対するものとすると定義し，水平方向の運動については右向きを正にとる。また，重力加速度の大きさを $g$ とする。

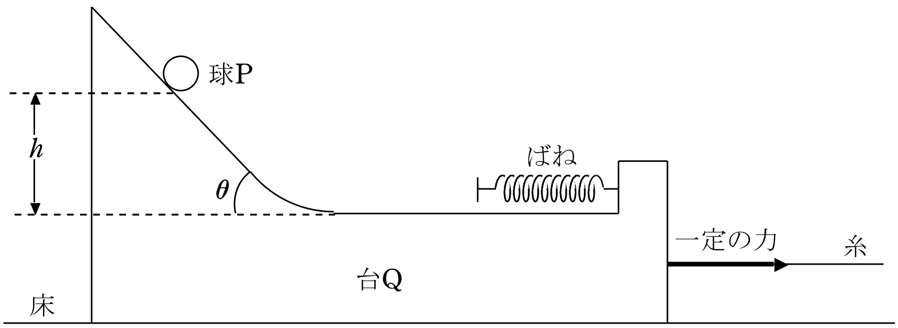



図1

(1)　床に対して静止している Qの斜面部分の水平面から高さ$h$の位置に，大きさが無視できる質量 $m$ の球(質点) P を静かに載せると同時に，台 Q を糸で一定の大きさの力で水平に引っ張り始めた。このとき，台Qと球Pは床に対して移動しつつ，球P は水平面から高さ $h$ のところにとどまった。球Pと台Qの間には摩擦はないものとする。球Pには重力と台Qからの抗力が作用しており，これら二つの合力が作用する方向が水平方向となす角の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ となる。また，$\theta$，$m$，$M$，$g$，$h$ のうち必要なものを用いると，球 P が台Qから受ける抗力の大きさは $\boxed{\text{イ}}$ ，この抗力と重力の合力の大きさは $\boxed{\text{ウ}}$ ，球Pの水平方向の加速度は $\boxed{\text{エ}}$ と表せ，台Qに作用する力の合力の大きさは $\boxed{\text{オ}}$ ，糸が台Qを引っ張る力の大きさは $\boxed{\text{カ}}$ と表せる。

(2)　(1)の状態で，ある時間が経過したときに糸を切ったところ，球Pは台Qの斜面をすべり，水平面に到達した。糸を切った瞬間の台Qの速度を$V_0$とする。球Pが水平面に到達した直後の球Pの速度 $v_1$ と台Qの速度 $V_1$ は，$m$，$M$，$g$，$h$，$V_0$ のうち必要なものを用いると，$v_1$＝[キ]，$V_1$＝[ク] と表せる。

(3)　(2)の状態から，球Pは台Qの水平面を右方に移動し，ばねに到達してばねを縮ませた。ばねが最も縮んだ瞬間の球Pの速度を$v_2$，台Qの速度を$V_2$，ばねの自然長からの縮みを$X$とすると，$m$，$M$，$g$，$h$，$k$，$V_0$ のうち必要なものを用いて，$v_2$＝[ケ]，$V_2$＝[コ]，$X$＝[サ]と表せる。なお，ばねは十分長く，縮みきることはないものとする。

(4)　(3)の状態の後，球Pはばねから押し戻される。球Pがばねから離れた直後の球Pの速度 $v_3$ は，$m$，$M$，$g$，$h$，$k$，$V_0$ のうち必要なものを用いると，$v_3$＝[シ]と表せる。

(4)の状態で，ばねから押し戻された球Pは台Qの水平面上において床に対して静止していた。このことから，(1)の状態で台Qの大きさ [[カ]] の力で引っ張り続けた時間$T$と，(2)で糸を切った瞬間の台Qの速度$V_0$は，$\theta$，$m$，$M$，$g$，$h$ のうち必要なものを用いて，$T$ ＝ [ス]，$V_0$＝ [セ] であったことがわかる。

問1　以下の図2を解答欄に書き写し，(2)で球Pが台Qの水平面上を移動し始めてから，(3)でばねに接触して押し戻され，(4)で再び台Qの水平面上を移動し始めるまでの，(ⅰ)球Pの速度，(ⅱ)台Qの速度，(ⅲ)球Pと台Qの重心の速度について，それぞれの変化を表すグラフを描け。

なお，(4)で，ばねから押し戻された球Pは台Qの水平面上において床に対して静止していたとし，また，$M=3m$とする。球Pがばねに到達した時刻$t_1$，ばねの縮みが最大となった時刻$t_2$，球Pがばねから離れた時刻$t_3$とし，それぞれの時刻における球P，台Q，球Pと台Qの重心の速度の値をそれぞれ記入すること。図2に示すように球Pを実線で，球Pを実線で，台Qを破線で，球Pと台Qの重心を一点鎖線で描くこと。曲線部分は厳密でなくてもよいが，上に凸か下に凸かはわかるように描くこと。

（※問題は続く）

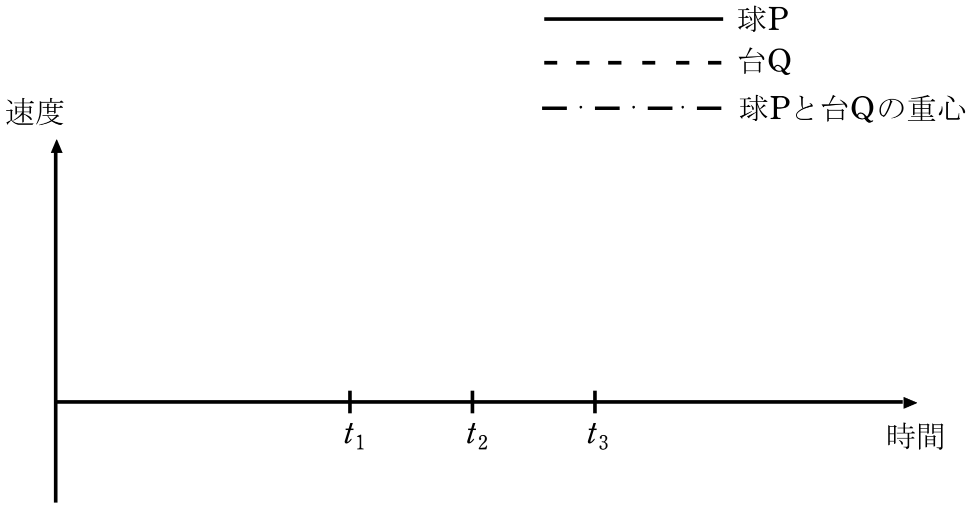



図2

**1　東京大学　問題 P,7**

(1)　衝突後の質点と箱の速度を，それぞれ$u$，$V$ とすると，運動量保存則から

$$mv = mu + mV \qquad \therefore \quad v = u + V \quad \cdots ①$$

はね返り係数から，$e = -\dfrac{u-V}{v}$　　　$\therefore \quad V = ev + u \quad \cdots ②$

①，②より，$v = u + ev + u$　から，　$u = \dfrac{(1-e)v}{2}$　…答

(2)　箱に対する小球の相対速度の大きさは②より，$|u-V| = ev$ から，質点が反対側の側面に衝突する時間は $\dfrac{l}{ev}$ であり，(1)より，$V = \dfrac{(1+e)v}{2}$ から，箱の移動距離は，

$\dfrac{(1+e)v}{2} \times \dfrac{l}{ev} = \dfrac{1+e}{2e}l$　よって，$x = \dfrac{(1+e)l}{2e}$　…答

研究　初めの2物体の重心位置は$x_G = 0$であり，重心の速さは $v_G = \dfrac{mv + m \times 0}{m+m} = \dfrac{v}{2}$

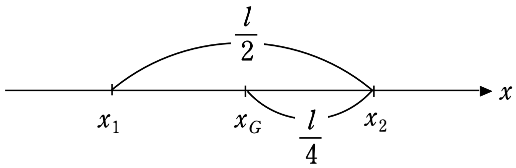
2物体に外力は生じていないでの，重心は$\dfrac{v}{2}$で等速直線運動をする。

つまり，最初から2回目の衝突までの時間 $\dfrac{l}{2v} + \dfrac{l}{ev} = \dfrac{e+2}{2ev}l$ で，重心は

$\dfrac{v}{2} \times \dfrac{e+2}{2ev}l = \dfrac{e+2}{4e}l$ 移動する。

したがって，このときの重心座標$x_G$は，$x_G = \dfrac{e+2}{4e}l$ である。

また，2回目の衝突のとき，2物体は同質量であるから，重心からの2物体の距離は等しくなり，その距離の差は$\dfrac{l}{2}$である。




よって，箱の座標$x_2$は，$x_2 = x_G + \dfrac{l}{4} = \dfrac{e+2}{4e}l + \dfrac{l}{4} = \dfrac{1+e}{2e}l$

(3)　1回目の衝突後の質点と箱の速度は，それぞれ，$u = \dfrac{(1-e)v}{2}$，$V = \dfrac{(1+e)v}{2}$ であり，

2回目の衝突後の速度をそれぞれ，$u_2$，$V_2$ として，

運動量保存則から　　$mv = mu_2 + mV_2 \qquad \therefore \quad v = u_2 + V_2 \quad \cdots ③$

はね返り係数から　　$e = -\dfrac{u_2 - V_2}{u - V} \qquad \therefore \quad eu - eV = V_2 - u_2 \quad \cdots ④$

（解説は次のページに続く）

③，④より，$V_2=\dfrac{eu-eV+v}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-e}{2}ev-\dfrac{1+e}{2}ev+v\right)=\dfrac{1-e^2}{2}v$ …答

(4) 跳ね返り係数から，相対速度は衝突の度に，$e$ 倍となることから，衝突の時間間隔は $\dfrac{1}{e}$ 倍となっていくので，$n$回目の衝突時刻を$t_n$とすると，

$$t_1=\frac{l}{v},\ t_2=\frac{l}{v}+\frac{l}{ev},\ t_3=\frac{l}{v}+\frac{l}{ev}+\frac{l}{e^2v}$$ となる。

また，3回目の衝突後の速度をそれぞれ，$u_3$，$V_3$ として，

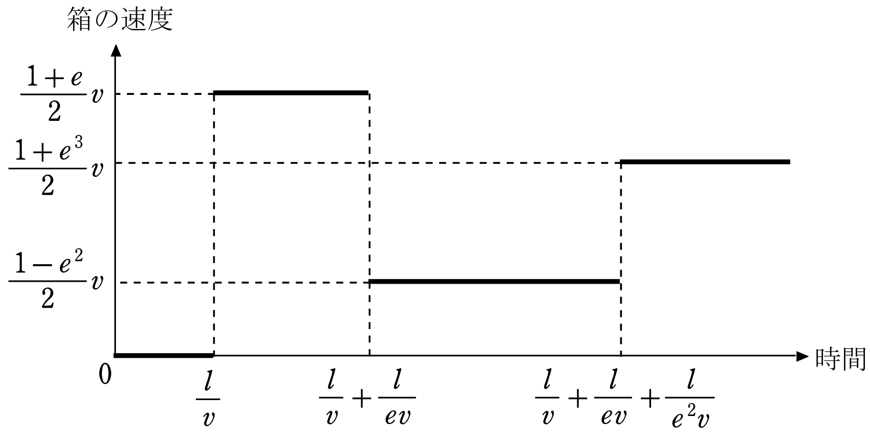
運動量保存則から　$mv=mu_3+mV_3$　∴　$v=u_3+V_3$ …⑤

はね返り係数から　$e=-\dfrac{u_3-V_3}{u_2-V_2}$　より，

④から，$e^2=\dfrac{u_3-V_3}{u-V}$　さらに，①より，$e^3=-\dfrac{u_3-V_3}{v}$

∴　$e^3v=-u_3+V_3$ … ⑥

⑤，⑥より，　$V_3=\dfrac{1+e^3}{2}v$　以上より，グラフは以下となる。




(5) (4)で述べたように，相対速度は衝突の度に，$e$ 倍となることから$e<1$ より，十分に時間が経過した後は，相対速度は0になると考えられるので，小球と箱は同じ速度になる。これは重心の速度と一致するので $\dfrac{v}{2}$ となる。よって，箱の速さは，$\dfrac{v}{2}$ …答

別解　小球と箱は同じ速度になり，この速度を$v_e$ とすると，運動量保存則から，

$mv=2mV_e$ より，$V_e=\dfrac{v}{2}$ …答

失ったエネルギーは運動エネルギーの減少量に等しいので，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\left(\frac{v}{2}\right)^2=\frac{1}{4}mv^2$$ …答

## $\boxed{7}$ 東京大学　問題 P,16

I　運動量保存則より，$0 = mu_1 + MV_1$　…　①

エネルギー保存則より，$mgh = \frac{1}{2}mu_1{}^2 + \frac{1}{2}MV_1{}^2$　…　②

①より，$u_1 : V_1 = -M : m$　より，$\frac{1}{2}mu_1{}^2 : \frac{1}{2}MV_1{}^2 = M : m$　から②より，

$\frac{1}{2}mu_1{}^2 = mgh \times \frac{M}{M+m}$　より，　$u_1 < 0$ であることに注意して，

$$u_1 = -\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}},\ V_1 = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}} = m\sqrt{\frac{2gh}{M(m+M)}}\quad \cdots 答$$

台に対する小球の相対速度は，$u_1 - V_1 = -\frac{m+M}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}} = -\sqrt{\frac{2gh(m+M)}{M}}$

であるから，$t_1 = \frac{l}{-(u_1 - V_1)} = l\sqrt{\frac{M}{2gh(m+M)}}$　…答

研究　台に対する小球の相対速度$v_r$は，換算質量$\mu$を用いて，

$mgh = \frac{1}{2}\mu v_r{}^2$ より，$u_1 < 0$ であることに注意して，

$$v_r = -\sqrt{\frac{2mgh}{\mu}} = -\sqrt{2mgh\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}$$

$$= -\sqrt{\frac{2mgh(m+M)}{mM}} = -\sqrt{\frac{2gh(m+M)}{M}}$$

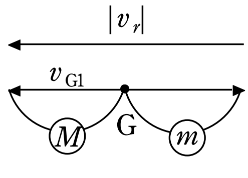
よって，$t_1 = \frac{l}{-v_r} = l\sqrt{\frac{M}{2gh(m+M)}}$　…答

重心の速度は常に$v_{\mathrm{G}} = 0$であり，重心に対する小球の相対速度$v_{\mathrm{G1}}$は，

$$v_{\mathrm{G1}} = \frac{M}{m+M}v_r$$

$$= -\frac{M}{m+M}\sqrt{\frac{2gh(m+M)}{M}}$$

$$= -\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}$$




よって，$v_{\mathrm{G1}} = v_1 - v_{\mathrm{G}}$ より，$v_{\mathrm{G}} = 0$から，$v_1 = v_{\mathrm{G1}} = -\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}$　…答

II　衝突後の小球と台の速度をそれぞれ $u_2$，$V_2$ とすると，

はね返り係数から，$e = -\frac{u_2 - V_2}{u_1 - V_1}$ となるので，相対速度は，衝突すると$e$倍となる。

よって，$t_2$ は $t_1$ の $\frac{1}{e}$ 倍　…答

（解説は次のページに続く）

Ⅲ　重心座標の位置は変化しないので，ずれは無い　…答

Ⅳ(1)　B点での，小球の$x$方向の速度を$u_x$とすると，運動量保存則より，

$0=MV+mu_x$ より，$u_x=-\dfrac{M}{m}V$　また，B点での速度は$\sqrt{{u_x}^2+{u_y}^2}$ であるから，

エネルギー保存より，$mgh=\dfrac{1}{2}m({u_x}^2+{u_y}^2)+\dfrac{1}{2}MV^2$ から，

$$mgh=\frac{1}{2}m\left(\frac{M^2}{m^2}V^2+{u_y}^2\right)+\frac{1}{2}MV^2$$

$$mgh=\left(\frac{M^2}{2m}+\frac{M}{2}\right)V^2+\frac{1}{2}m{u_y}^2$$

$$mgh=\frac{(m+M)M}{2m}V^2+\frac{1}{2}m{u_y}^2$$

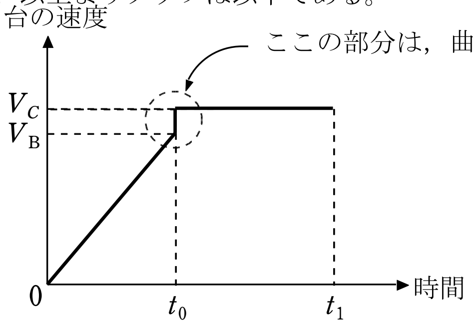
$$V^2=\frac{2m}{(m+M)M}\left(mgh-\frac{1}{2}m{u_y}^2\right)$$

$$=\frac{2m}{(m+M)M}\cdot\frac{m(2gh-{u_y}^2)}{2}$$

$V>0$ より，$V=m\sqrt{\dfrac{2gh-{u_y}^2}{M(m+M)}}$　…答

注　$-\sqrt{{u_x}^2+{u_y}^2}=u_1=-\sqrt{\dfrac{2Mgh}{m+M}}$　と考えないように！

(2)　小球が点Bまで滑り落ちるまで，台には一定の力が作用するので，　等加速度直線運動をし，点Bでの速さは(1)より，$m\sqrt{\dfrac{2gh-{u_y}^2}{(m+M)M}}$ である。また，点Cでの速さはⅠより，$m\sqrt{\dfrac{2gh}{M(m+M)}}$ である。その後は，台に力が生じないため等速直線運動をする。以上よりグラフは以下である。




ここの部分は，曲線にしても採点には影響しない。

$$\left(\begin{aligned}t_1&=l\sqrt{\frac{M}{2gh(m+M)}}\\V_B&=m\sqrt{\frac{2gh-{u_y}^2}{(m+M)M}}\\V_C&=m\sqrt{\frac{2gh}{M(m+M)}}\end{aligned}\right)$$

## 15 京都大学　問題P,32

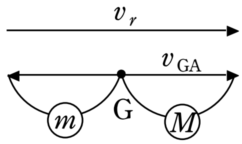
(1) (ア) 小球が最下点Bに到達する直前の小球の速さを$v_0$として，エネルギー保存則より，$mgh=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$より　$v_0=\sqrt{2gh}$　…答

(イ) 遠心力を考慮して，つり合いより$T=mg+\dfrac{mv_0{}^2}{h}$から，

$$T=mg+\frac{2mgh}{h}=3mg\quad\text{…答}$$

(ウ) 小球は壁Cに当たるまで$v_0$で等速直線運動をし，壁Cに当たった後は$ev_0$で等速直線運動をするから，$\dfrac{L}{v_0}+\dfrac{2L}{ev_0}=\left(1+\dfrac{2}{e}\right)\dfrac{L}{\sqrt{2gh}}$　…答

(2) (エ) 台車に対する小球の相対速度を$v_r$，換算質量を$\mu$として，エネルギー保存則より，$mgh=\dfrac{1}{2}\mu v_r{}^2$　から，$v_r=\sqrt{\dfrac{2mgh}{\mu}}$




よって，重心に対する小球の相対速度$v_{GA}$は，

$$\begin{aligned}v_{GA}&=\frac{M}{M+m}v_r=\frac{M}{M+m}\sqrt{\frac{2mgh}{\mu}}\\&=\frac{M}{M+m}\sqrt{2mgh\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}\\&=\frac{M}{M+m}\sqrt{2gh\frac{m+M}{M}}=\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}\quad\text{…答}\end{aligned}$$

(オ) 台車から小球を見ると円運動をしている。このときの速さは$v_r$であり，小球が最下点にあるとき，支柱には小球(糸)から水平方向の力はかからないので，水平方向の加速度は生じていない。したがって慣性力は働かないので，台車から見た小球のつり合いより

$$\begin{aligned}T'&=mg+\frac{mv_r{}^2}{h}\\&=mg+\frac{2m^2gh}{\mu}=mg+\frac{2mg(m+M)}{M}=\frac{(3M+2m)mg}{M}\quad\text{…答}\end{aligned}$$

(カ) (エ)より，$v_r=\sqrt{\dfrac{2mgh}{\mu}}=\sqrt{2mgh\left(\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{m}\right)}=\sqrt{\dfrac{2gh(M+m)}{M}}$　…答

(キ) $\dfrac{L}{v_r}=L\sqrt{\dfrac{M}{2gh(M+m)}}$　…答

(ク) 壁Cに衝突した後の，台車に対する小球の相対速度は$e$倍となるので，壁Cから端Dまでの移動時間は，$\dfrac{2L}{ev_r}=\dfrac{L}{e}\sqrt{\dfrac{2M}{gh(M+m)}}$　…答

（解説は次のページに続く）

(ケ)　(キ), (ク)より，移動時間は,

$$L\sqrt{\frac{M}{2gh(M+m)}}+\frac{L}{e}\sqrt{\frac{2M}{gh(M+m)}}=\left(1+\frac{2}{e}\right)L\sqrt{\frac{M}{2gh(M+m)}}$$

から，(ウ)より，$\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{e}\right)L\sqrt{\dfrac{M}{2gh(M+m)}}}{\left(1+\dfrac{2}{e}\right)\dfrac{L}{\sqrt{2gh}}}=\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}$　…答

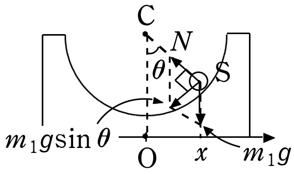
問1　系に外部から加わる水平方向の力積な0なので，水平方向の系の運動量は変化せず，0に保たれるため。

問2　台車の中央を原点にとると，重心座標は $x=\dfrac{-mh}{m+M}$ であり，球が端Dに至ったときの台車の座標を$X$とすると，重心座標は $x=\dfrac{m(X-L)+MX}{m+M}$　と表せるので，重心座標は変化しないから，$\dfrac{-mh}{m+M}=\dfrac{m(X-L)+MX}{m+M}$　より，$X=\dfrac{m(L-h)}{m+M}$

したがって，最初の位置から $\dfrac{m(L-h)}{m+M}$ だけ右の位置にある。　…答

## 27 東京大学　問題P,56

Ⅰ (1)　小球の位置を点Sとして，$\angle\mathrm{OCS}=\theta$ とし，小球にかかる垂直抗力を$N$とすると，小球にかかる重力と垂直抗力の合力の向きは，円形レールの接線方向になり，その大きさは，$m_1 g\sin\theta$であるから，小球にかかる$x$方向の力$F$は，$F=-m_1 g\sin\theta\cos\theta$




ここで，$\sin\theta=\dfrac{x}{R}$，$\cos\theta\fallingdotseq 1$であるから，$F=-\dfrac{m_1 g}{R}x$

よって，小球の$x$軸方向の運動方程式は，$m_1 a_1=-\dfrac{m_1 g}{R}x$　…答

(2)　(1)より，$a_1=-\dfrac{g}{R}x$から，単振動の角振動数$w$は$w=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$ より，

単振動の周期$T$は，$T=\dfrac{2\pi}{w}=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$　…答

Ⅱ (1)　小球と台車には，作用反作用から，$x$軸方向に同じ大きさの反対向きの力が生じ，その力の大きさを$f$として，運動方程式から，$m_1 a_1=-f$，$m_2 a_2=f$

より，$a_1$と$a_2$の関係式は，$m_1 a_1+m_2 a_2=0$　…答

(2)　重心座標$x_G$は，$x_G=\dfrac{m_1 x_1+m_2 x_2}{m_1+m_2}$であり，最初の状態での重心座標$x_0$は，

$x_0=\dfrac{m_1 L}{m_1+m_2}$　であるから，$x_G=x_0$より，　$m_1 x_1+m_2 x_2=m_1 L$　…答

(3)　$x_1-x_2=X$　とすると，Ⅰ(1) より，$a_1=-\dfrac{g}{R}X=-\dfrac{g}{R}(x_1-x_2)$　より，

Ⅱ(1)，(2)から，

$$a_1=-\frac{g}{R}\left(x_1-\frac{m_1 L-m_1 x_1}{m_2}\right)=-\frac{(m_1+m_2)g}{m_2 R}\left(x_1-\frac{m_1}{m_1+m_2}L\right)$$

したがって，単振動の中心では，加速度が0となるので，$a_1=0$のとき，

$x_1=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}L$　から，$x=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}L$　…答

別解 単振動の中心は，$x_1=x_2$となるときより，Ⅱ(2)から，$x_1=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}L$　…答

(4)　小球の単振動の端の一つは，点Qであるから，求める振幅は，

$$L-\frac{m_1}{m_1+m_2}L=\frac{m_2}{m_1+m_2}L\quad\cdots\text{答}$$

(5)　Ⅱ(3)より，小球の角振動数を$w'$とすると，$w'=\sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)g}{m_2 R}}$から，単振動の周期$T'$は，$T'=\dfrac{2\pi}{w'}=2\pi\sqrt{\dfrac{m_2 R}{(m_1+m_2)g}}$　…答